PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO - 2009

RESUELTOS

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático o no matemático) utilizado por el alumno. Penalizan los errores de cálculo. Los errores graves, y especialmente, aquellos que lleven a resultados incoherentes o absurdos, serán penalizados con la aplicación del 50 % sobre la calificación en cuestión. Se valorarán todas las partes que sean correctas, aunque el resultado final no lo sea.
Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) Se consideran las matrices de la forma $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -sen\ x \\ 0 & sen\ x & \cos x \end{pmatrix},\ x\in R$. Se pide:

a) Calcular $A(0),\ A\left(\frac{\pi}{2}\right),\ A\left(-\frac{\pi}{2}\right),\ A(\pi),\ A(-\pi)$.

b) Demostrar que A(x) tiene inversa para cualquier valor real de x. Calcularla.

c) Calcular los valores de x tales que A(x) = I (matriz identidad). ¿Es cierto que $A(x)\neq A(y)$ siempre que $x\neq y$?

----

a)

$$A(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 0 & -sen\ 0 \\ 0 & sen\ 0 & \cos 0 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}\ ;;\ A\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -sen\ \frac{\pi}{2} \\ 0 & sen\ \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$A\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}}\ ;;\ A(\pi)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi & -sen\ \pi \\ 0 & sen\ \pi & \cos \pi \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

$$A(-\pi)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\pi) & -sen(-\pi) \\ 0 & sen(-\pi) & \cos(-\pi) \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

b)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A(x)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -sen\ x \\ 0 & sen\ x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + sen^2 x = 1 \neq 0,\ \ \forall x \in R.$$

<u>La matriz A(x) es inversible para cualquier valor real de x, como queríamos demostrar.</u>

$$A^T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & sen\ x \\ 0 & -sen\ x & \cos x \end{pmatrix} \ ;;\ Adj\ \left[A^T(x)\right] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \cos x & sen\,x \\ -sen\,x & \cos x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & sen\,x \\ 0 & \cos x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ 0 & -sen\,x \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -sen\,x & \cos x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -sen\,x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \cos x & sen\,x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & sen\,x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos x \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\underline{\underline{= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & sen\,x \\ 0 & -sen\,x & \cos x \end{pmatrix} = A^{-1}(x)}}$$

c)

Del apartado a) se deduce que A(0) = I; como quiera que las funciones trigonométricas del seno y del coseno, ambas tienen como período 2π, los valores de x que satisfacen lo pedido son:

$$\underline{\underline{x = 0 + 2k\pi,\ \ k \in Z}}$$

Por la misma razón expuesta <u>no es cierto</u> que $A(x) \neq A(y)$ siempre que $x \neq y$, puesto que si $y = x + 2k\pi,\ (k \in Z)$, se cumple que $A(x) = A(x + 2k\pi)$.

****

2º) Demuestra que al punto A(-1, 1, 0) no es coplanario con los puntos B(0, 0, 0), $C(0,\ 1,\ 0)$ y D(1, 2, 1). Calcula la distancia de A al plano π determinado por los puntos B, C y D.

Los puntos B, C y D determinan los vectores:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{BC}=C-B=(0,\ 1,\ 0)-(0,\ 0,\ 0)=(0,\ 1,\ 0)$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{BD}=D-B=(1,\ 2,\ 1)-(0,\ 0,\ 0)=(1,\ 2,\ 1)$$

Considerando el punto B, la ecuación general del plano π es la siguiente:

$$\pi(B;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})\equiv\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ \underline{\pi\equiv x-z=0}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x-z=0 \\ A(-1,\ 1,\ 0)\end{array}\right\}\Rightarrow\ -1-0\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{A\notin\pi}$$

<u>El punto A(-1, 1, 0) no pertenece al plano π ≡ x – z = 0, c.q.d.</u>

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico de ecuación general $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ es $d(P_0,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; aplicándola al punto $A(-1,\ 1,\ 0)$ y al plano $\pi\equiv x-z=0$, es:

$$d(A,\ \pi)=\frac{|1\cdot(-1)+0\cdot 1-1\cdot 0+0|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{|-1+0-0+0|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\ unidades=d(A,\ \pi)}}$$

****

3º) Se considera la función $y = f(x)$, definida a trozos en el intervalo $[0,\ \pi]$, de la forma siguiente: $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ \ x = 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{sen\ x} & si\ \ 0 < x < \pi \\ 0 & si\ \ x = \pi \end{cases}$. Se pide:

a) Estudiar su continuidad.

b) Dibujar la función en un entorno de x = 0 y de x = π.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[0,\ \pi]$, con la excepción de los extremos, cuya continuidad es dudosa, y que estudiamos a continuación.

Teniendo en cuenta que una función es continua por la izquierda o por la derecha en un punto si el límite lateral por la izquierda o por la derecha, respectivamente, coincide con el valor de la función, sería:

$$x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \underline{-1} \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{sen\ x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x-1)}{sen\ x} = \lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{x}{sen\ x} \cdot (x-1) \right] = 1 \cdot (-1) = \underline{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)} \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ función\ \ f(x)\ \ es\ \ continua\ \ para\ \ x = 0}}$$

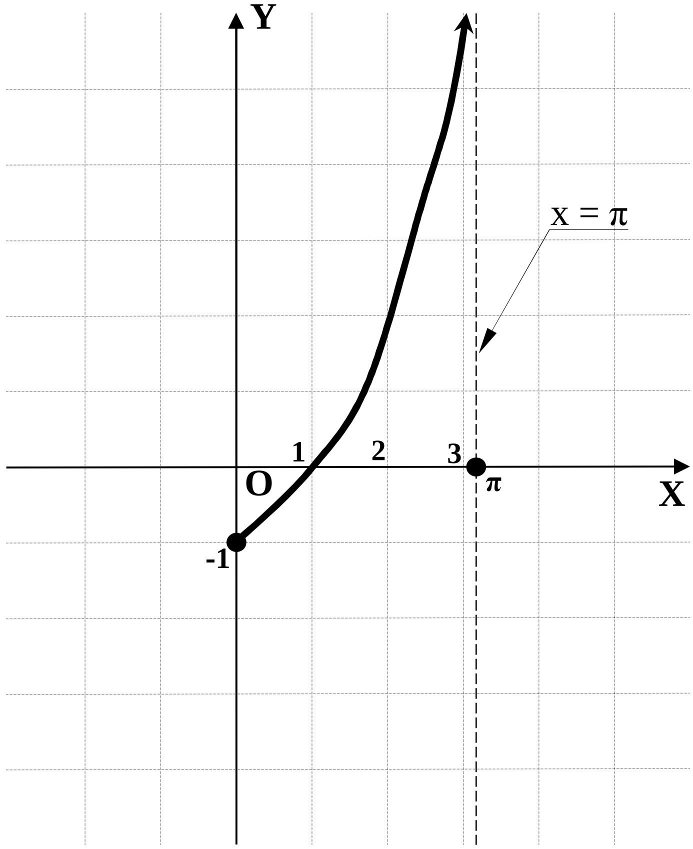
$$x = \pi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x^2 - x}{sen\ x} = \lim\limits_{x \to \pi} \left[\dfrac{x}{sen\ x} \cdot (x-1) \right] = \infty \cdot (\pi - 1) = \underline{\infty} \\ \\ \lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = f(\pi) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)} \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ función\ \ f(x)\ \ no\ \ es\ \ continua\ \ para\ \ x = \pi}}$$

b)

Para dibujar la función en un entorno de x = 0 y x = π tenemos en cuenta que la función tiene una asíntota vertical para x = π; que es continua para x = 0; que sus imágenes para x = 0, x = 1 y x = π/2 son -1, 0 y 0’9, respectivamente.

La representación gráfica, aproximada, en el intervalo $[0,\ \pi]$ es la siguiente:



****

4º) La recta y = 2x – 2 es una asíntota oblicua de la función $f(x)=\frac{2x^2+1}{x+k}$. Calcula el valor de k y los extremos relativos de la función f(x).

Las asíntotas oblicuas de una función son de la forma y = mx + n, siendo los valores de los coeficientes m y n son: $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$.

El valor de m es 2, independientemente del valor de k; el valor de n = -2 se produce para el siguiente valor de k:

$$n=-2=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x+k}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1-2x^2-2kx}{x+k}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2kx}{x+k}=-2\ \Rightarrow\ \underline{\underline{k=1}}$$

Los extremos relativos de la función $f(x)=\frac{2x^2+1}{x+1}$ son los siguientes:

$$f'(x)=\frac{4x(x+1)-(2x^2+1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{4x^2+4x-2x^2-1}{(x+1)^2}=\underline{\frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}=0\ ;;\ 2x^2+4x-1=0\ ;;\ x=\frac{-4\pm\sqrt{16+8}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{24}}{4}=\frac{-4\pm 2\sqrt{6}}{4}=$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=\frac{-2-\sqrt{6}}{2}}\ ;;\ \underline{x_2=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{(4x+4)(x+1)^2-(2x^2+4x-1)\cdot 2\cdot(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}=\frac{(4x+4)(x+1)-2(2x^2+4x-1)}{(x+1)^3}=$$

$$=\frac{4x^2+4x+4x+4-4x^2-8x+2}{(x+1)^3}=\underline{\frac{6}{(x+1)^3}=f''(x)}$$

$$f''\left(\tfrac{-2-\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{6}{\left(\frac{-2-\sqrt{6}}{2}+1\right)^3}=\frac{6}{\left(\frac{-2-\sqrt{6}+2}{2}\right)^3}=\frac{6}{\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^3}=\frac{6}{-\frac{6\sqrt{6}}{8}}=-\frac{8}{\sqrt{6}}<0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\textit{Máximo relativo para } x=\frac{-2-\sqrt{6}}{2}}$$

$$f\left(\tfrac{-2-\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{2\left(\dfrac{-2-\sqrt{6}}{2}\right)^2+1}{\dfrac{-2-\sqrt{6}}{2}+1}=\frac{2\left(\dfrac{4+4\sqrt{6}+6}{4}\right)+1}{\dfrac{-2-\sqrt{6}+2}{2}}=\frac{2\cdot\dfrac{5+2\sqrt{6}}{2}+1}{-\dfrac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{5+2\sqrt{6}+1}{-\dfrac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{12+4\sqrt{6}}{-\sqrt{6}}=$$

$$=-\frac{12\sqrt{6}+24}{6}=\underline{-2\sqrt{6}-4=f\left(\tfrac{-2-\sqrt{6}}{2}\right)}$$

$$\underline{\underline{\mathit{Máximo\ \ relativo}:\ P\left(\frac{-2-\sqrt{6}}{2},\ -2\sqrt{6}-4\right)}}$$

$$f''\left(\tfrac{-2+\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{6}{\left(\dfrac{-2+\sqrt{6}}{2}+1\right)^3}=\frac{6}{\left(\dfrac{-2+\sqrt{6}+2}{2}\right)^3}=\frac{6}{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^3}=\frac{6}{\dfrac{6\sqrt{6}}{8}}=\frac{8}{\sqrt{6}}>0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\mathit{Mínimo\ \ relativo\ \ para}\ \ x=\frac{-2+\sqrt{6}}{2}}$$

$$f\left(\tfrac{-2+\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{2\left(\dfrac{-2+\sqrt{6}}{2}\right)^2+1}{\dfrac{-2+\sqrt{6}}{2}+1}=\frac{2\left(\dfrac{4-4\sqrt{6}+6}{4}\right)+1}{\dfrac{-2+\sqrt{6}+2}{2}}=\frac{2\cdot\dfrac{5-2\sqrt{6}}{2}+1}{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{5-2\sqrt{6}+1}{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{12-4\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{12\sqrt{6}-24}{6}=\underline{2\sqrt{6}-4=f\left(\tfrac{-2+\sqrt{6}}{2}\right)}$$

$$\underline{\underline{\mathit{Mínimo\ \ relativo}:\ Q\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2},\ 2\sqrt{6}-4\right)}}$$

****

OPCIÓN B

1º) ¿Para qué valores de k tiene el sistema $\left.\begin{array}{r} kx-y+z=2x \\ x+2ky-kz=y \\ x+ky-z=0 \end{array}\right\}$ alguna solución distinta de la trivial (0, 0, 0)? Resuélvelo en el caso de k = 2.

La expresión más adecuada del sistema homogéneo es $\left.\begin{array}{r} (k-2)x-y+z=0 \\ x+(2k-1)y-kz=0 \\ x+ky-z=0 \end{array}\right\}$, cuya matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} k-2 & -1 & 1 \\ 1 & 2k-1 & -k \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$.

El sistema es compatible determinado (solución trivial) cuando la matriz de coeficientes tiene rango 3 (según el Teorema de Rouché-Fröbenius), es decir, cuando el determinante es distinto de cero.

$$|M|=\begin{vmatrix} k-2 & -1 & 1 \\ 1 & 2k-1 & -k \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix}=(k-2)(1-2k)+k+k-(2k-1)+k^2(k-2)-1=$$

$$=k-2k^2-2+4k+2k-2k+1+k^3-2k^2-1=k^3-4k^2+5k-2=0 \Rightarrow \mathit{Ruffini} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} & \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Las raíces diferentes son $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Para x = 1 y x = 2 el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el sistema es compatible indeterminado.

<u>Para x = 1 y para x = 2 el sistema tiene soluciones diferentes a la trivial.</u>

Para x = 2 el sistema es $\left.\begin{array}{r} -y+z=0 \\ x+3y-2z=0 \\ x+2y-z=0 \end{array}\right\}$.

Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $z = \lambda$, y despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la segunda, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} -y + \lambda = 0 \\ x + 2y - \lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y = \lambda} \;\; ;; \;\; x = -2y + \lambda = -2\lambda + \lambda = \underline{-\lambda = x}$$

$$\underline{\underline{Solución: \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}, \quad \forall \lambda \in R}}$$

****

2º) Calcular la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto A(2, 1, 5) y es perpendicular a las rectas $r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{4}$ y $s \equiv \frac{x-1}{-5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$.

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (-1,\ 0,\ 4)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-5,\ 3,\ -1)$.

El vector $\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$.

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -20j - 3k - 12i - j = -12i - 21j - 3k = (-12,\ -21,\ -3).$$

Cualquier vector que sea linealmente dependiente de $\overrightarrow{w'}$ puede ser vector director de la recta pedida, por ejemplo $\overrightarrow{w} = (4,\ 7,\ 1)$.

La ecuación continua de la recta pedida es la siguiente:

$$\underline{\underline{t \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-5}{1}}}$$

****

3º) Probar racionalmente que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una única solución dentro del intervalo abierto (1, 2). Calcúlala con un error menor que una décima.

Considerando la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Por tratarse de una función polinómica es continua y derivable en todo su dominio, que es R, por lo tanto lo será en cualquier intervalo considerado.

Teniendo en cuenta que $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0 \;\; y \;\; f(2) = 8 - 6 + 1 = 3 > 0$, según el Teorema de Bolzano, en el intervalo (1, 2) la función f(x) tiene, al menos, una raíz $x = a$, siendo 1 < a < 2 y tal que f(a) = 0.

Vamos a probar ahora, como se nos pide, que la raíz es única.

Si la función tuviera al menos otra raíz real perteneciente al intervalo (1, 2), $x = b$, indicaría que f(b) = 0, con lo cual se podría aplicar a la función f(x) el Teorema de Rolle, teniendo en cuenta lo expresado en el primer párrafo.

Siendo b > a, tendría que existir un valor c, tal que a < c < b, para el cual se anularía la derivada de la función, es decir: $f'(c) = 0$, y esto, como vamos a demostrar a continuación es imposible:

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ y siendo c > 1 es: $\underline{f'(c) \neq 0, \;\; \forall c \in R \;\; \{c > 1\}}$, lo cual contradice el Teorema de Rolle y, en consecuencia, demuestra que el polinomio dado tiene una sola raíz positiva, como queríamos probar.

Vamos a determinar ahora el valor de la raíz con una precisión menor que una décima, para lo cual utilizamos el método de bisección, sabiendo que f(1) < 0 y f(2) > 0.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \;\; \Rightarrow \;\; f(1'5) = (1'5)^3 - 3 \cdot 1'5 + 1 = 3'375 - 4'5 + 1 = -0'125 < 0 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{1'5 < c < 2}$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \;\; \Rightarrow \;\; f(1'7) = (1'7)^3 - 3 \cdot 1'7 + 1 = 4'913 - 5'1 + 1 = 0'813 > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{1'5 < c < 1'7}$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \;\; \Rightarrow \;\; f(1'6) = (1'6)^3 - 3 \cdot 1'6 + 1 = 4'096 - 4'8 + 1 = 0'296 > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{1'5 < c < 1'6}$$

$$\underline{\underline{c = 1'5 \;\; o \;\; c = 1'6}}$$

****

4º) Calcular el área de la región limitada por la curva $y=\frac{1}{1+x^2}$ y las rectas y = 0, x = a y x = b, siendo a y b las abscisas de los puntos de inflexión de la curva. Hacer un dibujo aproximado de la región.

Las abscisas a y b de los puntos de inflexión de la curva son las siguientes:

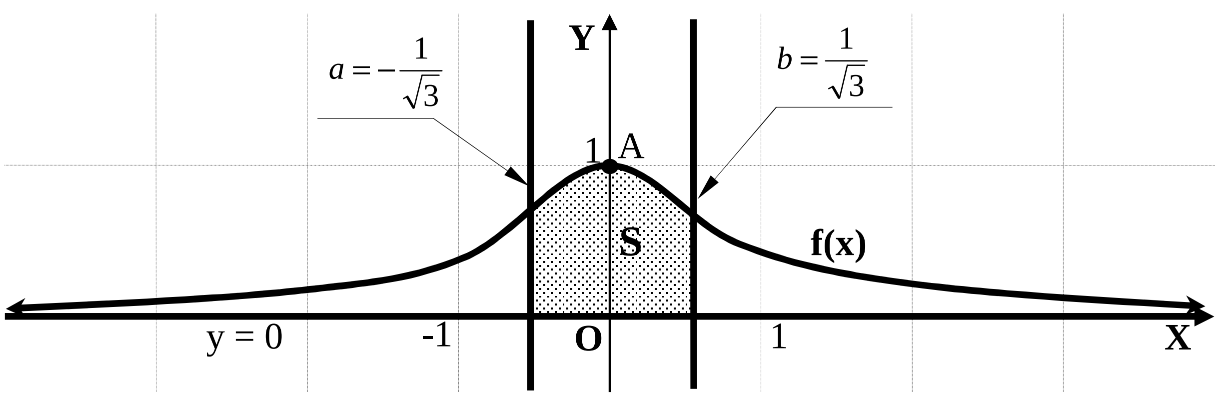
$$y'=\frac{-1\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$y''=\frac{-2\cdot\left(1+x^2\right)^2-(-2x)\cdot 2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2\cdot\left(1+x^2\right)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{-2-2x^2+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$y''=0\ \Rightarrow\ \frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}=0\ ;;\ 6x^2-2=0\ ;;\ 3x^2-1=0\ ;;\ x^2=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \underline{a=-\frac{1}{\sqrt{3}}}\ ;;\ \underline{b=\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{x\to\mp\infty} y=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$, el eje de abscisas es la asíntota horizontal de la función. La función es par, por lo que es simétrica respecto al eje de ordenadas. Por otra parte: $y=\frac{1}{1+x^2}>0,\ \forall x\in R$.

Considerando que el punto A(0, 1) es el punto máximo de la curva y todo lo anterior se puede hacer un dibujo aproximado de la curva, que es el indicado en la figura.



De la observación de la figura, teniendo en cuenta la simetría, el área pedida es:

$$S=2\cdot\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+x^2}\cdot dx=2\cdot\left[arc\ tag\ x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=2\cdot\left(arc\ tag\ \frac{1}{\sqrt{3}}-arc\ tag\ 0\right)=2\cdot\left(\frac{\pi}{6}-0\right)=$$

$$\underline{\underline{=\frac{\pi}{3}\ u^2\cong 1'05\ u^2=S}}$$

****